



**Автор:** Галкина Ольга Константиновна

**Предмет:** Алгебра

**Класс:** 11 класс

**Раздел:** Уравнения и неравенства, системы уравнений и неравенств

**Тема:** Линейные однородные дифференциальные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами

|                                              |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                          |
|----------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| Цели обучения (ссылка на учебную программу): | 11.4.1.25. Решать линейные однородные дифференциальные уравнения второго порядка вида $ay'' + by' + cy = 0$ , где $a, b, c$ – постоянные                                                                                                                                                                                                                                                                                 |
| Цели урока:                                  | <ul style="list-style-type: none"><li>• решать линейные однородные дифференциальные уравнения второго порядка вида <math>ay'' + by' + cy = 0</math>, где <math>a, b, c</math> – постоянные;</li><li>• показать, что общее решение дифференциального уравнения строится в зависимости от характера корней характеристического уравнения.</li></ul>                                                                        |
| Языковые цели:                               | Предметная лексика и терминология составить характеристическое уравнение; определить корни характеристического уравнения; подставить найденные значения в формулу общего решения линейные однородные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами; найти общее решение. Серия полезных фраз для диалога/письма: дифференцировать общее решение; находить произвольные постоянные; определить частное решение. |
| Ожидаемый результат:                         | Решают линейные однородные дифференциальные уравнения второго порядка (вида $ay'' + by' + cy = 0$ , где $a, b, c$ – постоянные)                                                                                                                                                                                                                                                                                          |
| Критерии успеха:                             |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                          |
| Привитие ценностей:                          | Ценности, основанные на национальной идее «Мәңгілік ел»: уважение; сотрудничество; труд и творчество; открытость; образование в течение всей жизни.                                                                                                                                                                                                                                                                      |
| Навыки использования ИКТ:                    | Знание, понимание, применение                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                            |
| Межпредметная связь:                         | Физика                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                   |
| Предыдущие знания:                           | Основные сведения о дифференциальных уравнениях. Дифференциальные уравнения первого порядка с разделяющимися переменными. Комплексные числа.                                                                                                                                                                                                                                                                             |

### Ход урока

| Этапы урока | Запланированная деятельность на уроке | Ресурсы |
|-------------|---------------------------------------|---------|
|-------------|---------------------------------------|---------|

|                                                           |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                     |                                                                                                                                                          |
|-----------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <p>Начало урока<br/>(6 минут)</p>                         | <p>I. Организационный момент: Эпиграф к уроку. Готфрид Вильгельм Лейбниц определял мир – умопостигаемый, или мир истинно сущего. Он же и ввёл определение дифференциала и дифференциального уравнения в 17 веке. С помощью метода «Толстые и тонкие вопросы» проводится проверка домашней работы. ВОПРОСЫ: Какое уравнение называется дифференциальным? (Ответ: уравнение, которое связывает между собой независимую переменную <math>x</math>, искомую функцию <math>y</math> и ее производные или дифференциалы). Порядок дифференциального уравнения это...? (Ответ: наибольший порядок производных) Что значит найти решение дифференциального уравнения? (Ответ: интегрировать его) Различие общего и частного решения дифференциального уравнения: (Ответ: Общее решение (общий интеграл) – каков порядок уравнения, столько и независимых произвольных постоянных. Частное – значение полученное при числовой подстановки независимых произвольных постоянных общее решение). Дифференциальное уравнение с разделёнными переменными? (Ответ: <math>f(y)dy=g(x)dx</math>, то есть переменные <math>x</math> и <math>y</math> разделены знаком равенства и функции <math>f(y)</math> и <math>g(x)</math> – непрерывны. И <math>\int f(y)dy = \int g(x)dx</math>). Приведите примеры. 6. Найти производную: <math>y=e^{7x}</math> Ответ: <math>y'=7e^{7x}</math> <math>y=e^{(7-x)}</math> ( Ответ: <math>y'=(7-x)' \cdot e^{(7-x)} = -e^{(7-x)}</math> ) ( Ответ: <math>y'=k_0 \cdot e^{(k_0 x)}</math> ) ФО. Словестное оценивание комментариев.</p>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                           |                                                                                                                                                          |
| <p>Информация нового материала<br/>(7 минут)</p>          | <p>Определение: Линейным неоднородным дифференциальным уравнением второго порядка называется уравнение вида <math>y''(x)+p(x)y'+q(x)y=f(x)</math>. Линейным однородным дифференциальным уравнением второго порядка с постоянными коэффициентами называется уравнение вида <math>ay''(x)+by'+cy=0</math> Характеристическое уравнение <math>ak^2+bk+c=0</math>, где <math>k</math> – корень квадратного уравнения. В зависимости от значения дискриминанта дифференциальные уравнения имеют так же три случая общего решения. Корни хар-го у-я <math>ak^2+bk+c=0</math> Значение Дискриминанта Общее решение <math>k_1=k_2 \in \mathbb{R}, D=0</math> <math>y(x)=(C_1 x+C_2) \cdot e^{(k_1 x)}</math> <math>k_1 \neq k_2 \in \mathbb{R}, D&gt;0</math> <math>y(x)=C_1 \cdot e^{(k_1 x)}+C_2 \cdot e^{(k_2 x)}</math> <math>k_1 \neq k_2 \in \mathbb{C}, k=a+bi, D&lt;0</math> <math>y(x)=e^{ax} [C_1 \cos(bx)+C_2 \sin(bx)]</math></p>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                               | <p>Абылкасымова А.Е., Корчевский В.Е., Жумагулова З. А. Алгебра и начала анализа (ЕМН) 11 кл. общеобразоват.шк. – Алматы: Мектеп, 2020.– 256 с.: ил.</p> |
| <p>Середина урока. Актуализация знаний<br/>(14 минут)</p> | <p>Работа в группах. Задания для групп по учебнику: 1) №28.3 (1). <math>y''(x)-6y'(x)+9y=0</math> 2) №28.3 (3). <math>y''(x)-2y'(x)-8y=0</math> 3) №28.4 (1). <math>y''(x)-2y'(x)+10y=0</math> РЕШЕНИЕ: 1) №28.3 (1). <math>y''(x)-6y'(x)+9y=0</math> Составим и решим характеристическое уравнение: <math>k^2-6k+9=0</math>, <math>D=0</math>, один корень <math>k=3 \Rightarrow y(x)=(C_1 x+C_2) \cdot e^{(k_1 x)}</math>, где <math>C_1, C_2</math> – произвольные действительные числа Ответ: <math>y(x)=(C_1 x+C_2) \cdot e^{3x}</math> 2) №28.3 (3). <math>y''(x)-2y'(x)-8y=0</math> Составим и решим характеристическое уравнение: <math>k^2-2k-8=0</math>, <math>D=36</math>, два корня <math>k_1=-2, k_2=4 \Rightarrow y(x)=C_1 \cdot e^{(k_1 x)}+C_2 \cdot e^{(k_2 x)}</math>, Ответ: <math>y(x)=C_1 \cdot e^{(-2x)}+C_2 \cdot e^{4x}</math> 3) №28.4 (1). <math>y''(x)-2y'(x)+10y=0</math> Составим и решим характеристическое уравнение: <math>k^2-2k+10=0</math>, <math>D=-36</math>, нет действительных корней. Тогда находим комплексные корни <math>D=36i^2</math>, <math>k_1=a+bi, k_2=a-bi</math> <math>k_1=(2+\sqrt{36i^2})/2=(2+6i)/2=1+3i</math>, <math>k_2=1-3i</math> <math>y(x)=e^{ax} [C_1 \cos(bx)+C_2 \sin(bx)]</math> Ответ: <math>y(x)=e^{1x} [C_1 \cos(3x)+C_2 \sin(3x)]</math> Дескрипторы Балл Составляет характеристического уравнение; Определяет корни характеристического уравнения; Подставляет найденные значения в формулу общего решения однородного дифференциального уравнения второго порядка; Находит общее решение 1 1 1 1 Всего 4 ФО. Взаимооценивание с комментариями учителя «учитель – ученик», «ученик – ученик». Учитель наблюдает за детьми, при необходимости комментирует. Цель задания. Подготовка к написанию СО. Задание 2. По учебнику № 28.6 (4) Найти частное решение дифференциального уравнения: <math>y''(x)-2y'(x)-8y=0</math>, при <math>y(0)=2</math>, <math>y(1)=0</math>. Мы нашли общее решение уравнения №28.3 (3) <math>y(x)=C_1 \cdot e^{(-2x)}+C_2 \cdot e^{4x}</math> <math>y(0)=2</math> <math>y(0)=C_1 \cdot e^{(-2 \cdot 0)}+C_2 \cdot e^{(4 \cdot 0)}=C_1+C_2 \Rightarrow C_1+C_2=2</math> <math>y(1)=0</math> <math>y(1)=C_1 \cdot e^{(-2)}+C_2 \cdot e^{4}=0 \Rightarrow C_1 \cdot e^{(-2)}+C_2 \cdot e^{4}=0</math> <math>\{ \begin{cases} C_1+C_2=2 \\ C_1 \cdot e^{(-2)}+C_2 \cdot e^{4}=0 \end{cases} \Rightarrow \{ \begin{cases} C_1=2-C_2 \\ (2-C_2) \cdot e^{(-2)}+C_2 \cdot e^{4}=0 \end{cases} \Rightarrow C_2 \cdot (e^{6}-1)=2 \Rightarrow C_2=2/(e^{6}-1) \Rightarrow C_1=2-2/(e^{6}-1)= (2e^{6}-2)/(e^{6}-1)</math> Частное решение <math>y(x)=(2e^{6}-4)/(e^{6}-1) \cdot e^{(-2x)}+2/(e^{6}-1) \cdot e^{4x}</math> Или <math>y(x)= (-2)/(e^{6}-1) \cdot e^{4x}+(2e^{6})/(e^{6}-1) \cdot e^{(-2x)}</math> Дескрипторы Балл Составляет систему уравнения используя начальные условия; Определяет произвольные постоянные; Определяет частные решения; 1 1 1 1 Всего 4 ФО. Взаимооценивание по готовому образцу. Учитель наблюдает, при необходимости комментирует.</p> | <p>карточка</p>                                                                                                                                          |

|                                        |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                        |                                                                                                                                                                    |
|----------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <p>Конец урока<br/>(10 минут)</p>      | <p>Индивидуальный тест (дополните). 1. Термин «дифференциал» ввёл.....<br/>2. Порядок уравнения <math>5y^{(,,)}+4y^{(,,)}+y^{(,,)}=0</math> равен..... 3. Правая часть однородного дифференциального уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами равна..... 4. Если <math>y^{(,,)}-4y^{(,,)}+53y=0</math>, то характеристическое уравнение ..... 5. Если <math>D&lt;0</math>, то может ли уравнение иметь корни?.... 6. Если <math>y^{(,,)}+y=0</math>, то а) составьте характеристическое уравнение ..... в) определите корни (если они есть)..... с) составьте общее решение уравнения (если оно существует) ..... 7) Найдите частное решение дифференциального уравнения <math>y^{(,,)}+y=0</math>, при условии <math>y(0)=1</math>, <math>y(\pi/2)=2</math> 8) Общее решение однородного дифференциального уравнения имеет вид <math>y(x)=C_1 \cdot e^{(-6x)}+C_2 \cdot e^{1x}</math>. Определите характеристическое уравнение... Ключ к тесту: 1) Лейбниц Г.В.; 2) 3; 3) 0; 4) <math>k^2-4k+53=0</math>; 5) уравнение имеет корни на множестве комплексных чисел; 6) а) <math>k^2+1=0</math>; в) <math>k^2=-1</math>, <math>k^2=i^2</math>; <math>k=\pm i</math>; с) <math>k=a\pm bi \Rightarrow a=0, b=1</math>. Тогда <math>y(x)=e^{(0 \cdot x)} [C_1 \cos(x)+C_2 \sin(x)]</math>, то есть <math>y=C_1 \cdot \cos x+C_2 \cdot \sin x</math>. 7) <math>y(0)=1 \Rightarrow 1=C_1 \cdot \cos 0+C_2 \cdot \sin 0 \Rightarrow C_1=1</math>. <math>y(\pi/2)=2 \Rightarrow 2=C_1 \cdot \cos \pi/2+C_2 \cdot \sin \pi/2 \Rightarrow C_2=2</math>. Частное решение <math>y=\cos x+2\sin x</math>. 8) Следовательно корни характеристического квадратного уравнения равны -6 и 1. По теореме Виета <math>\{ \begin{matrix} -6+1=-5 \\ -6 \cdot 1=-6 \end{matrix} \} \Rightarrow \begin{matrix} y^{(,,)}+5y^{(,,)}-6y=0 \end{matrix}</math></p> |                                                                                                                                                                    |
| <p>Рефлексия<br/>(2 минуты)</p>        | <p>Прием «Круги по воде» Цель: оценить степень усвоения изученного материала Инструкция: Ключевое слово урока «УРАВНЕНИЕ» записывается в столбик. И на каждую букву учащиеся предлагают и записывают существительные или словосочетания по изученной теме.</p>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                         | <p>макет на доске</p>                                                                                                                                              |
| <p>Домашнее задание<br/>(1 минута)</p> | <p>Дифференцированное. Цель: отработать полученные умения и навыки на уроке Инструкция: решить номера по учебнику, классная работа является как образец. 1) По учебнику № 28.3, 28.4, 28.6 стр 216. 2) Заполнить таблицу №28.1</p>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                     | <p>Карточка, Абылкасымова А.Е., Корчевский В.Е., Жумагулова З. А. Алгебра и начала анализа (ЕМН) 11 кл. общеобразоват.шк. – Алматы: Мектеп, 2020.– 256 с.: ил.</p> |